

# MONTHLY NOTICES

## OF THE

### ROYAL ASTRONOMICAL SOCIETY.

---

VOL. XXIII.      *Supplemental Notice.*      No. 9.

---

*Mécanique Céleste: Observations sur la Comparaison établie par M. Delaunay entre les Expressions des Coordonnées de la Lune déduites de sa Théorie avec celles qui avaient été obtenues antérieurement.\** Par M. G. de Pontécoulant.

Rien sans doute ne saurait être plus utile au perfectionnement de la théorie de la Lune que la comparaison des expressions, obtenues par des méthodes différentes, des trois coordonnées qui fixent à chaque instant la position de cet astre, et qui doivent servir à la construction des tables lunaires. Aussi M. Delaunay a fait, sous ce rapport, un travail très recommandable lorsqu'il a dernièrement comparé les résultats obtenus par M. Plana dans sa Théorie de la Lune, à ceux qu'il a déduits lui-même de la méthode qu'il a suivie pour arriver au même but; mais comme l'auteur n'a publié jusqu'à présent que l'exposition de la méthode, et que le second volume de son ouvrage, qui doit contenir les applications numériques, n'a pas encore paru, il est tout-à-fait impossible, au moins quant à présent, de découvrir les véritables causes qui ont produit les différences qu'on remarque entre quelques uns de ses résultats et ceux de M. Plana, et de décider d'une manière certaine de quel côté est l'erreur, puisque d'après le mode de comparaison adopté par M. Delaunay, ces résultats devraient être parfaitement identiques. Cependant il m'a paru d'après la seule inspection des tableaux de M. Delaunay que plusieurs des résultats qu'il présente peuvent être avec raison

\* Voir les *Comptes Rendus* de l'Académie des Sciences; 1862, 1<sup>er</sup> Sé-mestre. (T. liv. Nos. 15, 16, 17, et 18.)

regardés comme entachés d'inexactitude; et c'est à provoquer sur ce point une utile discussion entre les géomètres qui se sont occupés de la théorie de la Lune, pour arriver enfin à des formules parfaitement correctes, telles qu'on doit les espérer de l'état actuel de la science, que cette note est spécialement destinée.

J'examinerai successivement les expressions des trois coordonnées de la Lune, *la longitude, la latitude, et la valeur inverse du rayon vecteur*, en suivant l'ordre adopté par M. Delaunay, en négligeant d'abord comme il l'a fait les termes d'un ordre supérieur au 7<sup>e</sup>; nous négligerons également pour abrégé le travail, à moins de quelques circonstances particulières, les termes indépendants de la quantité très petite  $m$ , ou multipliés par une puissance de cette quantité inférieure à la 3<sup>e</sup>, parceque ces termes étant indépendants de la force perturbatrice, ou ne dépendant en général que de la première puissance de cette force, il sera toujours assez facile de les vérifier et de reconnaître par conséquent la cause des anomalies qu'on remarquerait entre les résultats trouvés à cet égard par les différents auteurs. J'omettrai de même, pour abrégé autant que possible cette note, les termes où les résultats de M. Delaunay, tout en s'éloignant de ceux de M. Plana, concordent avec ceux obtenus antérieurement par M. Lubbock, ou par moi, puisque les corrections qu'ils indiquent dans les valeurs données par M. Plana, peuvent être regardées désormais comme acquises à la science.

Dans les tableaux suivants je présenterai les résultats obtenus par M. Plana tels qu'ils sont donnés dans son ouvrage, et sans leur faire subir aucune transformation, et je ramènerai au contraire les résultats de M. Delaunay que je me proposerai de leur comparer, à ce qu'ils devraient être en adoptant pour l'excentricité  $e$  de l'orbe lunaire et son inclinaison  $\gamma$  à l'écliptique, les valeurs que M. Plana leur attribue; il m'a semblé que les différences des résultats en ressortiraient mieux, puisque ce sont en définitive les résultats de M. Plana qui doivent servir de terme de comparaison.

Dans une colonne particulière je présenterai en regard des résultats précédents, ceux que j'ai obtenus moi-même dans ma théorie des mouvements lunaires (*Théorie Analytique du Système du Monde*, t. iv.), et j'ajouterai au pied les observations succinctes qui peuvent résulter de cette double comparaison.

Les inégalités dont dépendent les différents termes que nous aurons à examiner, seront indiquées par leurs arguments dans lesquels :

*D* représente la longitude moyenne de la Lune moins celle du Soleil.

*F* la longitude moyenne de la Lune moins celle du Nœud.

*l* l'anomalie moyenne de la Lune.

*l'* l'anomalie moyenne du Soleil.

*Longitude.*

Arguments.	Termes de Plana.	Termes de Delaunay.	Théorie Analytique.
$l'$	$-\frac{39522017}{6144} m^4 e^2 e'$	$-\frac{66621857}{6144} m^4 e^2 e'$	$-\frac{39522017}{6144} m^4 e^2 e' \text{ (a)}$ A*
	$+\frac{3257665}{576} m^6 e'$	$+\frac{3253129}{576} m^6 e'$	$+\frac{3257665}{576} m^6 e' \text{ (b)}$ A*
$l - l'$	$+\frac{8548531}{6144} m^4 e e'$	$+\frac{2814537}{2048} m^4 e e'$	$+\frac{2844993}{2048} m^4 e e' \text{ (c)}$
	$+\frac{307373383}{36864} m^5 e e'$	$+\frac{103086725}{12288} m^5 e e'$	$+\frac{307187071}{36864} m^5 e e'$
$l + l'$	$-\frac{4173895}{6144} m^4 e e'$	$-\frac{2714815}{6144} m^4 e e'$	$-\frac{2806183}{6144} m^4 e e' \text{ (d)}$
	$-\frac{19962409}{9216} m^5 e e'$	$-\frac{42301831}{18432} m^5 e e'$	$-\frac{19962409}{9216} m^5 e e' \text{ (e)}$
$l - 2 l'$	$-\frac{489}{128} m e^3 e'^2$	$+\frac{153}{128} m e^3 e'^2$	$-\frac{1017}{256} m e^3 e'^2 \text{ (f)}$
$2 l$	$-\frac{6221}{192} m^2 e^4$	$-\frac{29543}{1536} m^2 e^4$	$-\frac{78109}{4608} m^2 e^4$
	$-\frac{567}{16} m^2 e^2 e'^2$	$-\frac{4089}{128} m^2 e^2 e'^2$	$-\frac{3809}{128} m^2 e^2 e'^2$
	$-\frac{5597}{64} m^4 e^2$	$-\frac{11319}{128} m^4 e^2$	$-\frac{5597}{64} m^4 e^2 \text{ (g)}$
$2 F - l$	$+\frac{21387}{2048} m^3 e \gamma^2$	$-\frac{1797}{2048} m^3 e \gamma^2$	$+\frac{2867}{2048} m^3 e \gamma^2 \text{ (h)}$
$2 D$	$-\frac{904829}{9216} m^3 e^4$	$-\frac{343199}{3072} m^3 e^4$	$-\frac{118199}{3072} m^3 e^4$
	$-\frac{761227}{6144} m^3 e^2 e'^2$	$-\frac{293497}{2048} m^3 e^2 e'^2$	$-\frac{264025}{2048} m^3 e^2 e'^2$
	$+\frac{144641579}{294912} m^5 e^2$	$+\frac{142735019}{294912} m^5 e^2$	$+\frac{143944619}{294912} m^5 e^2$
	$-\frac{70043}{768} m^5 e'^2$	$-\frac{61969}{864} m^5 e'^2$	$-\frac{91129}{864} m^5 e'^2$
$2 D - l'$	$+\frac{7220939}{4096} m^4 e^2 e'$	$+\frac{7254731}{4096} m^4 e^2 e'$	$+\frac{7273931}{4096} m^4 e^2 e'$

\* Les termes marqués d'un A ont été vérifiées par M. Adams.

Arguments.	Termes de Plana.	Termes de Delaunay.	Théorie Analytique.
	$-\frac{245}{32} m e^4 e'$	$-\frac{105}{32} m e^4 e'$	$-\frac{35}{64} m e^4 e'$
$2 D + l'$	$+\frac{14201441}{4096} m^4 e^2 e'$	$+\frac{44611649}{36864} m^4 e^2 e'$	$+\frac{4791425}{4096} m^4 e^2 e'$
	$+\frac{105}{32} m e^4 e'$	$+\frac{45}{32} m e^4 e'$	$+\frac{15}{64} m e^4 e'$
$2 D + l$	$+\frac{940855}{82944} m^6 e$	$+\frac{1863229}{82944} m^6 e$	$+\frac{1228925}{41472} m^6 e$
	$-\frac{967447}{2304} m^4 e e'^2$	$-\frac{963415}{2304} m^4 e e'^2$	$-\frac{957907}{2304} m^4 e e'^2$
	$+\frac{2354603}{8192} m^4 e^3$	$+\frac{5433089}{24576} m^4 e^3$	$+\frac{6040589}{24576} m^4 e^3$
$2 D - l$	$+\frac{3496767841}{2654208} m^6 e$	$+\frac{3514035745}{2654208} m^6 e$	$+\frac{3464046433}{2654208} m^6 e \text{ (i)}$
	$+\frac{127960397}{221184} m^5 e$	$+\frac{127571597}{221184} m^5 e$	$+\frac{127960397}{221184} m^5 e \text{ (j)}$
	$+\frac{36126953}{9216} m^4 e e'^2$	$+\frac{37031581}{9216} m^4 e e'^2$	$+\frac{37134073}{9216} m^4 e e'^2$
	$-\frac{326681}{1536} m^3 e e'^2$	$-\frac{322081}{1536} m^3 e e'^2$	$-\frac{326617}{1536} m^3 e e'^2 \text{ (k)}$
	$-\frac{14428681}{24576} m^4 e^3$	$-\frac{8805001}{24576} m^4 e^3$	$-\frac{10219551}{24576} m^4 e^3$
	$-\frac{827639}{18432} m^3 e^3$	$-\frac{91071}{2048} m^3 e^3$	$-\frac{64221}{2048} m^3 e^3$
$2 D - l - l'$	$+\frac{1211197}{8192} m^5 e e'$	$+\frac{1200185}{8192} m^5 e e'$	$+\frac{1202189}{8192} m^5 e e'$
$2 D - l - 2 l'$	$+\frac{219639709}{73728} m^4 e e'^2$	$+\frac{218629693}{73728} m^4 e e'^2$	$+\frac{219825901}{73728} m^4 e e'^2 \text{ (l)}$
$2 D - l + 2 l'$	$-\frac{46669}{128} m^4 e e'^2$	$-\frac{46831}{128} m^4 e e'^2$	$-\frac{23417}{64} m^4 e e'^2$
$2 D - 2 l$	$+\frac{2166605291}{884736} m^5 e^2$	$+\frac{1966421891}{884736} m^5 e^2$	$+\frac{2117652131}{884736} m^5 e^2$
$2 D - l + l'$	$+\frac{2827212637}{221184} m^6 e e'$	$+\frac{2745937561}{221184} m^6 e e'$	$+\frac{2827212637}{221184} m^6 e e' \text{ (m)}$
$2 D - 2 F$	$-\frac{168653}{18432} m^4 \gamma^2$	$-\frac{110333}{18432} m^4 \gamma^2$	$-\frac{110333}{18432} m^4 \gamma^2 \text{ (n)}$

Arguments.	Termes de Plana.	Termes de Delaunay.	Théorie Analytique.
$4 D - l + l'$	$-\frac{3547567}{8192} m^5 e e'$	$-\frac{241903}{8192} m^5 e e'$	$-\frac{363727}{8192} m^5 e e'$
$D$	$-\frac{1553407}{1024} m^5 \frac{a}{a'}$	$-\frac{2357119}{1536} m^5 \frac{a}{a'}$	$-\frac{4628333}{3072} m^5 \frac{a}{a'}$
$D + l'$	$-\frac{124805}{768} m^3 \frac{a}{a'} e'$	$-\frac{123365}{768} m^3 \frac{a}{a'} e'$	$-\frac{128485}{768} m^3 \frac{a}{a'} e'$
$D - l$	$-\frac{156147}{1024} m^3 \frac{a}{a'} e$	$-\frac{155267}{1024} m^3 \frac{a}{a'} e$	$-\frac{155267}{1024} m^3 \frac{a}{a'} e$
	$-\frac{14427729}{16384} m^4 \frac{a}{a'} e$	$-\frac{14382081}{16384} m^4 \frac{a}{a'} e$	$-\frac{14382081}{16384} m^4 \frac{a}{a'} e$

### Observations.

(a) Notre valeur s'accorde avec celle de M. Plana, celle de M. Delaunay paraît fautive.

(b) Idem.

(c) Notre valeur revue par M. Adams, ne laisse aucun doute sur son exactitude.

(d) Notre valeur employée dans le calcul du terme suivant qui s'accorde avec celui de M. Plana, est nécessairement exacte.

(e) Notre valeur coïncide avec celle de M. Plana.

(f) La valeur de M. Delaunay paraît à la fois inexacte et de signe contraire à ce qu'elle devrait être.

(g) Il y a soupçon d'erreur dans les calculs de M. Delaunay puisque nous nous accordons avec M. Plana.

(h) On trouve le détail du calcul de ce terme assez difficile dans les *Comptes Rendus* de l'Acad. 1842.

(i) Comme ce terme dépend du terme en  $m^5 e$  qui est inexact dans les calculs de M. Delaunay on ne saurait s'étonner de la différence qui existe entre nos valeurs.

(j) Nous nous accordons avec M. Plana.

(k) Notre terme employé dans le calcul d'autres quantités a donné des résultats exacts, ce qui le vérifie.

(l) Il entre dans le calcul de ce terme des quantités qui ne sont pas données par M. Plana, ce qui peut causer la différence qu'on remarque dans nos valeurs.

(m) L'accord de notre résultat avec celui de M. Plana paraît prouver suffisamment que la valeur de M. Delaunay est fautive.

(n) La révision de nos calculs nous a amenés à constater l'exactitude de la valeur donnée par M. Delaunay.

(o) La révision de nos calculs nous a amenés à un accord parfait avec M. Delaunay.

*Latitude.\**

Arguments.	Termes de Plana.	Termes de Delaunay.	Théorie Analytique.
$F - l$	$-\frac{45611}{2048} m^4 e \gamma$	$-\frac{46587}{2048} m^4 e \gamma$	$-\frac{45611}{2048} m^4 e \gamma$
$F + l$	$-\frac{2679}{128} m^4 e \gamma$	$-\frac{2739}{128} m^4 e \gamma$	$-\frac{2679}{128} m^4 e \gamma$
	$-\frac{1356205}{12288} m^5 e \gamma$	$-\frac{710431}{6144} m^5 e \gamma$	$-\frac{710431}{6144} m^5 e \gamma$ (b)
$2 D - F$	$-\frac{4548169}{442368} m^5 \gamma$	$-\frac{4548169}{442368} m^5 \gamma$	$-\frac{4548169}{442368} m^5 \gamma$ (c)
$2 D + F$	$+\frac{134555}{2048} m^3 e^2 \gamma$	$+\frac{126875}{2048} m^3 e^2 \gamma$	$+\frac{126875}{2048} m^3 e^2 \gamma$ (d)
$2 D - F - l'$	$+\frac{25493}{512} m^4 e' \gamma$	$+\frac{158057}{4096} m^4 e' \gamma$	$+\frac{158953}{4096} m^4 e' \gamma$
$2 D - F + l'$	$+\frac{24337}{4608} m^4 e' \gamma$	$+\frac{131363}{36864} m^4 e' \gamma$	$+\frac{134927}{36864} m^4 e' \gamma$
$2 D - F - 2 l$	$+\frac{435649}{6144} m^3 e^2 \gamma$	$+\frac{807091}{12288} m^3 e^2 \gamma$	$+\frac{808711}{12288} m^3 e^2 \gamma$ (e)
$4 D - F$	$+\frac{127483}{122880} m^5 \gamma$	$+\frac{456643}{122880} m^5 \gamma$	$+\frac{456643}{122880} m^5 \gamma$ (f)

*Observations.*

(a) Nos valeurs s'accordent avec celles de M. Plana, les corrections proposées par M. Delaunay paraissent donc inexactes.

(b) M. Delaunay adopte la rectification que nous avons fait subir au terme de M. Plana, quoiqu'il ait omis de le remarquer dans son tableau.

(c) Le terme donné par M. Plana coïncide avec le mien en adoptant la formule de transformation corrigée par M. Adams. Son accord avec celui donné par M. Delaunay confirme son exactitude.

\* Il y a relativement à l'expression de la latitude une observation générale à faire ; j'avais adopté dans ma théorie le coefficient du terme dépendant de l'argument de la latitude, tel qu'il est donné par M. Plana. Mais M. Adams ayant rectifié une erreur parmi les quantités du 5<sup>e</sup> ordre dans l'expression de ce coefficient†, erreur qui influe sur tous les autres coefficients de l'expression de la latitude, il faut pour en tenir compte multiplier par le facteur  $\left(1 + \frac{121}{256} m^4\right)$  tous les termes de M. Plana, avant de les comparer avec nos résultats et ceux de M. Delaunay. Cette simple correction fait disparaître, comme on peut s'en assurer, une grande partie des différences qu'on remarquait entre nos valeurs et celles de M. Plana, et les réduit relativement à l'expression de la latitude à un très petit nombre de termes.

† *Comptes Rendus*, 1862, 1<sup>er</sup> Sémiestre (t. liv. No. 16), p. 876.

(d) M. Delaunay adopte la correction que j'ai faite au terme de M. Plana, quoiqu'il ne l'ait point remarqué dans son tableau.

(e) Plusieurs combinaisons paraissent avoir été omises par MM. Plana et Delaunay dans la formation de ce terme.

(f) Le coefficient de notre théorie différerait légèrement de celui de M. Delaunay, la rectification d'une erreur de calcul a ramené l'accord.

### *Valeur Inverse du Rayon Vecteur.*

M. Delaunay n'ayant porté l'approximation dans l'expression de la valeur inverse du rayon vecteur que jusqu'aux quantités du 5<sup>e</sup> ordre, et ses résultats se trouvant à une seule exception près parfaitement d'accord dans cette limite d'approximation, avec ceux de ses devanciers, nous n'aurons de notre côté que de très courtes observations à présenter sur cet article.

Argument.	Terme de Plana.	Terme de Delaunay.	Théorie Analytique.
$l$	$-\frac{152129}{4608} m^4 e$	$-\frac{153389}{4608} m^4 e$	$-\frac{152129}{4608} m^4 e$

### *Observation.*

Le coefficient du terme multiplié par  $\cos l$  dans l'expression du rayon vecteur, se déduit du coefficient du terme correspondant ou du terme multiplié par  $\sin l$  dans l'expression de la longitude, on ne conçoit donc pas la correction proposée par M. Delaunay relativement au coefficient de ce terme dans l'expression du rayon vecteur puisqu'il admet le coefficient du terme correspondant dans l'expression de la longitude, tel que le donne M. Plana.

J'ai reconnu en outre, que conformément à l'observation de M. Delaunay, les 3 termes suivants devaient être ajoutés à ceux que j'avais déjà signalés comme devant être supprimés dans l'expression de la valeur inverse du rayon vecteur donnée par M. Plana :

$$\text{Arg. } 2 D - l - l' \quad + \frac{35}{8} m e^3 e'$$

$$\text{Arg. } 2 D - l + l' \quad - \frac{15}{8} m e^3 e'$$

$$\text{Arg. } 2 D - 2 F \quad + \frac{3}{32} m \gamma^4$$

Il résulte de la discussion précédente, 1<sup>o</sup>, Que quelques unes des corrections apportées par M. Delaunay aux résultats de M. Plana, même en se bornant à l'ordre d'approximation auquel il s'est arrêté paraissent inexactes ; 2<sup>o</sup>, Que les différences



entre les coefficients des diverses inégalités lunaires donnés par ces deux géomètres et ceux qui se déduisent de notre théorie, se réduisent en définitive à un petit nombre de termes sans importance par leur valeur numérique, et qu'on ferait du reste aisément disparaître, soit en reprenant les calculs de M. Plana, ce qui est facile puis qu'il en a donné tout le détail dans son ouvrage, soit que M. Delaunay se décide lui-même à revoir quelques uns de ses résultats avant de les livrer à l'impression. Quoiqu'il en soit, on peut regarder comme un fait très important dans la théorie du système du monde, que cette coïncidence à-peu-près complète des formules littérales qui déterminent *la longitude, la latitude*, et le *rayon vecteur* de la Lune, obtenues par trois méthodes absolument différentes et en portant l'approximation aussi loin que la pratique pouvait l'exiger. Ce résultat que les géomètres du dernier siècle n'avaient osé espérer, doit puissamment contribuer au perfectionnement des tables lunaires, et donner à leur construction toute la précision qu'ont acquise nos autres tables astronomiques.

---

*Further Observations on Solar Spots.*

By the Rev. F. Howlett.

It is with much pleasure that I submit to the indulgent attention of the Royal Astronomical Society a further account of observations of the Solar Spots; begging the Society to accept also the fruits, whatever they may be worth, of about eighteen months' additional honest endeavours to depict certain of those interesting phenomena which still continue to perplex the astronomical world, strongly prepossessed though some observers may be as to the theory of their character and import.

I have now the honour of laying before the Society a further series of drawings contained in about 64 sheets, comprising, first, some 128 whole disks on a scale throughout somewhat smaller than that usually employed hitherto by heliophotographers, and giving about 1 inch to  $9'37''$  of arc. The sheets exhibit, also, secondly, several hundreds of drawings of spots and groups of spots, on a scale varying from 1 inch to about  $115''$ , to the considerably larger scale of 1 inch to  $62''$ ; which last is, perhaps, as convenient and instructive a size as could well be adopted for representing the details of the solar phenomena generally, in a daily record.

As I stated at our Monthly Meeting in December 1862, the amplification last mentioned may be readily and very effectively obtained by projecting the Sun's image in a duly darkened